SOLUCIÓN AL PROBLEMA COMBINATORIO USANDO UNA FUNCIÓN DE CLASE HÖLDER

Anna Tarasenko, PhD
Área Académica de Matemáticas y Física, Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Pachuca, México
Oleksandr Karelin, PhD
Manuel González-Hernández, PhD
Área Académica de Ingeniería Industrial, Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Pachuca, México

Abstract

A combinatorial problem on the distribution and common area of inscribed squares is considered. In this paper we propose to investigate this problem based on the properties of Hölder functions. Peano curve gives us an example of a continuous curve that has the measure of the set of its graphic points greater than zero. All differentiable curves have the measure zero. Hölder curves are "better" than the continuous curves and "worse" than differentiable curves, they occupy intermediate positions. All the Hölder curves with the exponent greater than ½ have the measure zero. In this work, based on the Sierpinski carpet, we constructed a Hölder curve with the exponent ½, and the measure greater than zero. The considered combinatorial problem is solved through the properties of this curve.

Keywords: Hölder function, Hölder curves, Measure, Graphic point

Introducción

Las funciones de clase Hölder y relacionados con ellos las espacios de Hölder con peso tienen aprovechamiento amplio en problemas teóricos tales como problemas de contorno de funciones analíticas, ecuaciones integrales singulares (Muskhelishvili 2008), (Gakhov 1990), (Duduchava 70) y en diferentes aplicaciones (Muskhelishvili 75), (Duduchava 79). En este artículo se presenta una propiedad conectada con la medida del conjunto de puntos de la grafica de curvas de clase Hölder.

Planteamiento del problema combinatorio

Sea $K(a)$ un cuadrado con lado de longitud a y sean dos cuadrados con lados aλ, $0<\lambda<1$, es decir $K(\lambda a,1), K(\lambda a,2)$ inscritos en el cuadrado $K(a)$. El área de la figura común está dada por

$$K(\lambda a)=\bigcup_{n(1)=1}^{2} K(\lambda a, n(1)).$$

Designamos por $S\{K(\lambda a)\}$ o $S(\lambda a)$ su área. Posteriormente se inscriben en el cuadrado $K(\lambda a,1)$ dos cuadrados $K(\lambda^2 a,1,1), K(\lambda^2 a,1,2)$ con los lados $\lambda^2 a$ y en el cuadrado $K(\lambda a,2)$ se inscriben dos cuadrados $K(\lambda^2 a,2,1), K(\lambda^2 a,2,2)$ con los lados $\lambda^2 a$. El área de la figura común ahora es:

$$K(\lambda^2 a)=\bigcup_{n(1),n(2)=1}^{2} K(\lambda^2 a, n(1), n(2)).$$

Designamos por $\alpha = -1,\ \beta = 1,\ \mu = 1,$ o $S(\lambda^2 a)$ su área. Con cada cuadrado $K(\lambda^2 a, n(1), n(2))$, $K(\lambda^2 a, n(1), n(2))$ se procede analógicamente, y de esta forma se obtienen 2^3 cuadraditos $K(\lambda^2 a, n(1), n(2), n(3))$; $n(1) = 1{,}2$, $n(2) = 1, 2$, $n(3) = 1, 2$, obteniéndose la figura de cuadrados por:

$$K(\lambda^3 a) = \bigcup_{n(1),n(2),n(3)=1}^{2} K(\lambda^3 a, n(1), n(2), n(3))$$

con aria $S\{K(\lambda^3 a)\}$ o $S(\lambda^3 a)$.

De esta forma se continúa con el proceso y en el paso de número i se obtienen 2^i cuadraditos $K(\lambda^2 a, n(1), n(2),..., n(i))$, $n(j) = 1{,}2;\ j = 1,..., i$; por lo tanto la figura resulta es:

$$K(\lambda^i a) = \bigcup_{n(1)=1,...,n(i)=1}^{2} K(\lambda^i a, n(1), n(2),..., n(i))$$

y su área es entonces $S\{K(\lambda^i a)\}$ o $S(\lambda^i a)$. Este proceso se sigue infinitamente.

Entonces nos preguntamos ¿Se pueden escoger tales disposiciones de los cuadrados en cada paso, y que el área común de los cuadraditos sea mayor qua un numero positivo q, $S(\lambda^i a) \geq q > 0$? , es decir $\lim_{i\to\infty} S(\lambda^i a) > 0.$

Exponente de la condición de Hölder mayor que ½

Con la idea de responder a la pregunta sobre el área común de los cuadrados, se propone la una curva L definida en forma paramétrica dada como:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} ,t \in [\alpha, \beta]$$

Si las funciones x(t), y(t) son continuas, entonces el sistema define la curva L continua, es decir, $L \in C([\alpha, \beta])$. Y si las funciones x(t), y(t) son diferenciales, entonces el sistema define la curva diferenciable L, esto es, $L^1 \in C([\alpha, \beta])$.

Una función f(t) que satisface la condición:

$| f(t_1) - f(t_2)| \leq C_\mu | t_1 - t_2 |^\mu$, $t_1 \in [\alpha, \beta]$, $t_2 \in [\alpha, \beta]$, $\mu \in (0{,}1]$

se llama función de clase Hölder con exponente μ y constante C. Cuando las funciones x(t), y y(t) son de clase Hölder con exponente μ, entonces el sistema define la curva L de clase de Hölder. La clase de curvas de Hölder con exponente μ se designan por $H_\mu([\alpha, \beta])$, y mantienen la inclusión

$$C^1([a,b]) \subset H_\mu([a,b]) \subset C([a,b]).$$

Ejemplo. La función $f(t) = | t |^\mu$, $t \in [-1,+1]$, $\mu \in (0{,}1]$ es una función de Hölder con exponente μ. Su derivada $f'(t)$ es igual a $-\mu t^{\mu-1}$ con $t \in [-1{,}0)$. Dicha función es continua. La derivada de la función $f(t)$ con $t \in [-1,+1]$ no existe en el punto. Cualquier función diferenciable es función de Hölder con exponente $\mu = 1$ o de Lipschitz.

La curva de Peano (Gelbaum, 90) nos da un ejemplo de una curva continua que tiene la medida de conjunto de sus puntos de gráfica mayores que cero. Las curvas diferenciables tienen medida igual a cero. ¿Qué medida tiene las curvas clase Hölder?

Iniciaremos primero con el simple hecho: si $L \in C^1([\alpha,\beta])$, entonces $mes(L) = 0$, la medida del conjunto de los puntos de su grafica es igual a cero. Por simplicidad suponemos las constantes de Hölder para las funciones $x(t)$ y $y(t)$ son iguales a 1, $a = -1$ y $b = 1$:
$|x(t_1) - x(t_2)| < |t_1 - t_2|$, $|y(t_1) - y(t_2)| < |t_1 - t_2|$, $t_1 \in [-1,+1], t_2 \in [-1,+1]$.

1. La gráfica de L pertenece el cuadrado con el lado de longitud 2 y área 4, realmente: $|x(t_1) - x(t_2)| < 1+1$, $|y(t_1) - y(t_2)| < 1+1$.

2. Partimos el segmento $[-1, +1]$ en dos intervalos $[-1,0]$ y $[0,1]$.

Cuando $t \in [-1,0]$ la curva L está ubicada en un cuadrado con el lado de longitud 1 y área uno. Lo mismo tenemos para $t \in [0,1]$. La gráfica de L pertenece a la unión de los dos cuadrados con la área común de dos.

3. Partimos en cuatro los cuadrados $[-1,-1/2]$, $[-1/2,0]$, $[0,1/2]$, $[1\backslash 2, 1]$.

Cuando t∈[-1,-1/2] la curva L está ubicada en un cuadrado con el lado de longitud 1/2 y área 1/4. Lo mismo tenemos para otros segmentos parciales. La grafica de L pertenece a la unión de los cuatros cuadrados con la área común igual uno.

Este proceso se sigue en la forma mencionada. En cada paso posterior el área ocupada de L será disminuida al doble, y por supuesto mes (L)=0.

No es difícil mostrar, que si $L \in H_\mu([\alpha,\beta])$, $\mu \in (1/2,1]$, entonces $mes(L) = 0$, la medida del conjunto de los puntos de su grafica es igual a cero.

Exponente de Hölder menor que ½

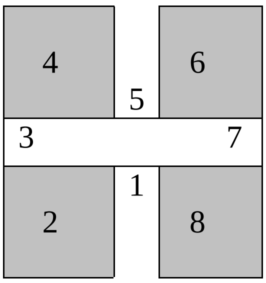
Para construir una curva clase Hölder que tiene medida del conjunto de sus puntos de la gráfica mayores que cero se requiere de la alfombra de Sierpinski (Sierpinski 1916). Esto es:

Sea q una serie de números que converge a $q < 1$,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = q < 1, \; a_1 > 0,$$

además la serie debe ser estrictamente monótona creciente.

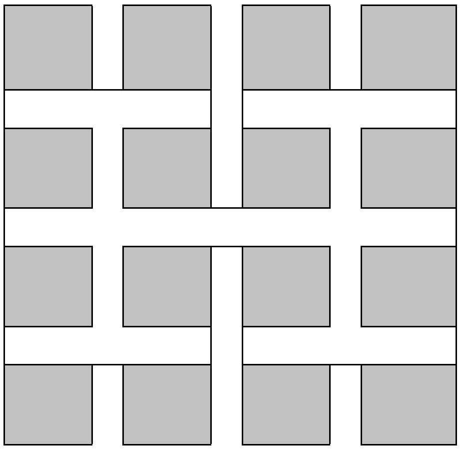
1er paso. Del cuadrado unitario cortamos un cruce de grueso $\theta < a_1/4$. El área de cruce es $S_1 < a_1/2$. Conectamos los cuadrados entre sí.



Sea J una unidad que se divide en 8 partes $J_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots 8,$ impares iguales θ_1 y tomamos partes pares iguales $\left(1-4\theta_1\right)/4.$ Los segmentos J_{2k-1} los aplicamos a líneas conectadas $2k-1$. Esta transformación representa la función buscada en los segmentos J_{2k-1}.

2^0 paso.

De cada cuadrado $2k,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4$ se corta en el cruce de área $S_2 < a_2/4$ y de grosor $\theta_2 < a_2/3x4$. Se conectan los cuadrados entre sí. Se enumeran los cuadrados y líneas determinadas.



Nuevamente se divide cada uno de los segmentos $J_{2k},\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4$ en 8 partes, $J_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots 8$. Las partes impares se toman iguales a θ_2 y las pares se toman iguales a $\left(1-4\theta_1\right)/4^2-\ \theta_2$. Las correspondencias se introducen como en el primer paso. Este proceso se sigue. La transformación construida representa la función buscada en los segmentos impares.

Representamos la función buscada en los segmentos pares de J. Para t que no se encuentra en partes impares, el valor de la función buscada de este punto la damos como punto de la intersección de los cuadrados encajados, los cuales corresponden a partes pares encajadas en el segmento J en cada paso.

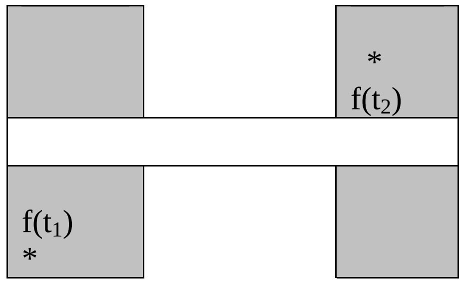
De la convergencia de la serie $a_1+a_2+a_3+\ldots$ se tiene $r\ =\ mesR$, la medida de R, donde R es la unión de todos segmentos colectados en todos los pasos, $r<1$. En realidad este subconjunto R del conjunto J se aplica para $f\left(t\right)$ al conjunto (segmentos verticales y horizontales) con la medida cero. Solamente puntos de $J\setminus R$ se aplican al conjunto con la medida plano positiva $mes\left(J\setminus R\right)=1-r$.

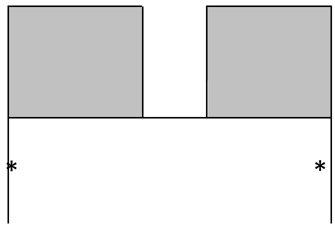
Ahora demostramos que la curva construida L satisface a la condición de Hölder con exponente $\mu=1/2$.

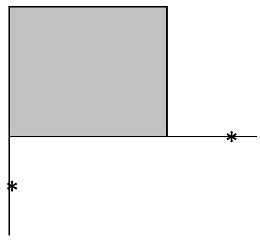
Si después de algunos pasos $f\left(t_1\right)$ y $f\left(t_2\right)$ pertenecen a un mismo segmento conectado de los dos cuadrados, entonces:

$\left|f(t_1) - f(t_2)\right| = \left|t_1 - t_2\right|$

Investigamos los casos cuando después del primer paso los puntos $f(t_1)$ y $f(t_2)$, $t_1 < t_2$ tienen la siguiente posición de un punto respecto a otro, para llegar de $f(t_1)$ a $f(t_2)$ es necesario pasar por un cuadrado que no tiene puntos $f(t_1)$ y $f(t_2)$. Esto es :

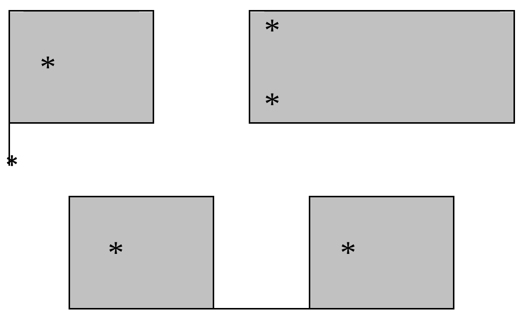




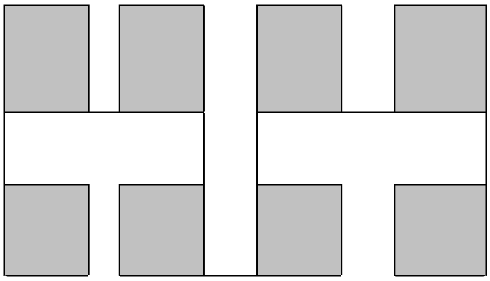


$\left|f(t_1) - f(t_2)\right| = \left|t_1 - t_2\right|^{1/2}$

Los casos restantes se reducen a los siguientes, o casos análogos.



Por fin para la estimación de las diferencias $\left|f(t_1) - f(t_2)\right|$ y $\left|t_1 - t_2\right|$ se usan las situaciones de los puntos en la figura



Afirmación Principal I: La curva construida L tiene la medida mayor que cero y pertenece a la clase de Hölder con el exponente $\mu = 1/2$.

Solución al problema combinatorio.

Sea L una curva clase Hölder

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

$$|x(t_1) - x(t_2)| < C_1 |t_1 - t_2|^{\mu}, |y(t_1) - y(t_2)| < C_2 |t_1 - t_2|^{\mu}, \quad \mu \in (0, \frac{1}{2}]. \qquad (*)$$

Un ejemplo de tal curva L nos da la alfombra de Sierpinski. Sea $S(L)$ el área que ocupa esta curva que es igual a $q \neq 0$, $mesL = q$. Suponemos $\alpha = 0, \beta = 1, \mu = \frac{1}{2}, C_1 = C_2$.

Cuando $t \in [0,1]$ la curva L está ubicada en el cuadrado K con lado $a = 2C$, esto se sigue de (*).

Cuando $t \in [0, \frac{1}{2}]$, tenemos la parte $L(\lambda a, 1)$ de L. La curva $L(\lambda a, 1)$ pertenece al cuadrado $K(\lambda a, 1)$ con el lado λa, donde

$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}}$,

$L(\lambda a, 1) \subset K(\lambda a, 1)$, esto sigue de (*).

Cuando $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, la parte $L(\lambda a, 2)$ de L pertenece al cuadrado $K(\lambda a, 2)$ con el lado λa. Las partes $L(\lambda a, 1)$ y $L(\lambda a, 2)$ componen toda curva L, $L = L(\lambda a, 1) \bigcup L(\lambda a, 2)$.

De esta manera la curva L pertenece al área común $F(\lambda a)$ de cuadrados $K(\lambda a, 1)$ y $K(\lambda a, 2)$, así $L \subset F(\lambda a)$, $F(\lambda a) = K(\lambda a, 1) \bigcap K(\lambda a, 2)$.

De los segmentos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$

se generan curvas $L(\lambda^2 a, 1, 1)$, $L(\lambda^2 a, 1, 2)$, $L(\lambda^2 a, 2, 1)$, $L(\lambda^2 a, 2, 2)$, con lo cual $L(\lambda a, 1) = L(\lambda^2 a, 1, 1) \bigcup L(\lambda^2 a, 1, 2)$, $L(\lambda a, 2) = L(\lambda^2 a, 2, 1) \bigcup L(\lambda^2 a, 2, 2)$, por supuesto la curva $L = L(\lambda^2 a, 1, 1) \bigcup L(\lambda^2 a, 1, 2) \bigcup L(\lambda^2 a, 2, 1) \bigcup L(\lambda^2 a, 2, 2)$ y se reproducen cuadraditos $K(\lambda^2 a, 1, 1)$, $K(\lambda^2 a, 1, 2)$, $K(\lambda^2 a, 2, 1)$, $K(\lambda^2 a, 2, 2)$ con todo eso

$K(\lambda^2 a, 1, 1) \supset L(\lambda^2 a, 1, 1)$, $K(\lambda^2 a, 1, 2) \supset L(\lambda^2 a, 1, 2)$,

$K(\lambda^2 a, 2, 1) \supset L(\lambda^2 a, 2, 1)$, $K(\lambda^2 a, 2, 2) \supset L(\lambda^2 a, 2, 2)$.

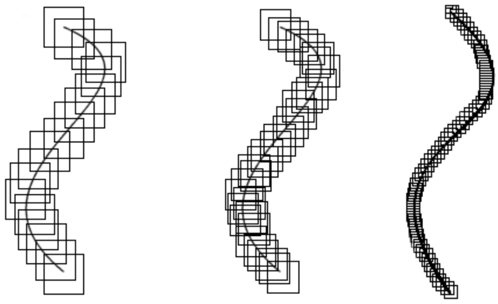
Por consiguiente $L \subset F(\lambda^2 a)$, donde $F(\lambda^2 a)$ es el área común de los cuadraditos $F(\lambda^2 a) = K(\lambda^2 a,1,1) \bigcup K(\lambda^2 a,1,2) \bigcup K(\lambda^2 a,2,1) \bigcup K(\lambda^2 a,2,2)$. Estas consideraciones se hacen posteriormente. En el paso número i se tendrán los segmentos $[0,\frac{1}{2^i}],[\frac{1}{2^i},\frac{2}{2^i}],[\frac{2}{2^i},\frac{3}{2^i}],...,[\frac{2^i-1}{2^i},1]$; las curvas $L(a,n(1),n(2),...,n(i))$, $n(j)=1,2;\ j=1,...,i$ forman

$$L = \bigcup_{n(1)=1,...,n(i)=1}^{2} L(\lambda^i a, n(1), n(2),..., n(i))$$

y los cuadraditos $K(\lambda^i a, n(1), n(2),..., n(i)),\ n(j)=1,2;\ j=1,...,i$, con lados $\lambda^i a$ y área común

$$F(\lambda^i a) = \bigcup_{n(1)=1,...,n(i)=1}^{2} K(\lambda^i a, n(1), n(2),..., n(i)).$$

Se cumplen las propiedades $L(a,n(1),...,n(i)) \subset K(a\lambda^i, n(1),...,n(i))$, $L \subset F(\lambda^i a)$.



De aquí se puede deducir que
$mesL \le mesF(\lambda^i a)$ y esto significa $0 < q \le mesF(\lambda^i a)$, para cualquiera i;
$$q \le \lim_{i\to\infty} mesF(\lambda^i a) \le mes \lim_{i\to\infty} F(\lambda^i a).$$
Hemos demostrado el siguiente.
Afirmación Principal II:

Existen disposiciones de los cuadrados en cada paso, tal que el área común de ellos sea mayor que un número positivo q, $q > 0.$

Desigualdades que definen una curva de clase de Hölder permiten encontrar la longitud de lados del cuadrado $K(\lambda^i a, n(1), n(2),..., n(i))$ en el cual se encuentra la curva

$$L = L(\lambda^i a, n(1), n(2),..., n(i)),$$

donde

$$n(j)=1,2;\ j=1,...,i;\ t \in [\frac{s-1}{2^i},\frac{s}{2^i}].$$

Para localizar el cuadrado en el plano, hay que encontrar valores mínimo y máximo de las funciones $x(t), y(t)$, $t \in [\frac{s-1}{2^i},\frac{s}{2^i}]$. Como las funciones $x(t), y(t)$ son continuas, entonces tienen valores máximos y mínimos, los cuales se obtienen en este segmento $[\frac{s-1}{2^i}, \frac{s}{2^i}]$. Así hemos encontrado la posición del cuadrado en el que se encuentra $L(\lambda^i a, n(1), n(2),..., n(i))$. Por lo tanto se ha resuelto un problema combinatorio.

References:

Duduchava R.: *On the boundedness of the singular integral operator in H ̈older spaces with weights (in Russian)*, Matematicheskie Issledovania vol.5, No.1, 56–76, Kishinev, Stiintsa. 1970

Duduchava R.,: *Integral equations of convolution type with discontinuous presymbols, singular integral equations with fixed singularities and their applications to some problems of mechanics (in Russian)*, Trudi Tbiliskogo Mathematicheskogo Instituta Academii Nauk Gruzinskoi SSR, vol. 60, 1-135., 1979.

Gakhov F.D,: *Boundary Value Problems*. Dover Publications., 1990.

Gelbaum, B.R. and Olmsted, J.M.H.,: Theorems and Counterexamples in Mathematics, Springer-Verlag., 1990.

Muskhelisvili N.I.: *Singular integral equations, Boundary value problems of the theory of functions and some of their applications to mathematical physics.* Dover Publications, 2nd Edition. 2008.

N.I.Muskhelisvili,: *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Springer.,1975.

Sierpinski Wacław,: *Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée (in French)*, C. r. hebd. Seanc. Acad. Sci., Paris, vol. 162: JFM 46.0295.02, 629–632., 1916