

ETUDE EXPERIMENTALE ET MODELISATION NUMÉRIQUE DES TRANSFERTS HYDRIQUES ET DE SOLUTE DANS UN MILIEU POREUX NON SATURE-SATURE

Hassan Lemacha

Laboratoire de Géologie Appliquée, Géomatique et Environnement,
Université Hassan II de Casablanca, Faculté des Sciences Ben M'sik,
Casablanca, Maroc

Abdellatif Maslouhi

Laboratoire Interdisciplinaire en Ressources Naturelles et en Environnement,
Université IBN TOFAIL, Faculté des Sciences de Kenitra, Maroc

Moumtaz Razack

Laboratoire d'hydrogéologie UMR 6532, Université de Poitiers, Faculté des
Sciences, Fondamentales et Appliquées, Poitiers Cedex, France

Zoubida Mghazli

Laboratoire SIANO, Université IBN TOFAIL, Faculté des Sciences de
Kenitra, Maroc

Frédéric Hecht

Laboratoire Jacques-Louis Lions UMR 7598, Université Pierre et Marie
Curie, Paris cedex 05, France

Abstract

In this work, a mathematical modeling tool was developed to simulate in a simple and fast way, and with an acceptable precision, the water and solute transfers in unsaturated-saturated porous medium. The resolution of this problem in unstationary mode, is based on the use of an mathematical formulation which consists in considering as a single continuum the saturated and the unsaturated zones. The modeling tool is based on two numerical methods: the alternate directions implicit method (ADI) and the finite elements method (finite elements code Freefem++). This code was adapted to the equations used in this study, namely: Richards' equation to study the water flow in the unsaturated zone, the diffusivity equation expressed in a linear and nonlinear form for the groundwater flow and the transport equation of advection-dispersion type to study the solute transfer. The advantage of the Freefem++ code is that it generates self-adapting grids. This is interesting to analyse the transfers at singular zones,

in particular at the capillary fringe. Experiments were carried out on a laboratory physical model, consisting in a sand filled tank of 160 cm length and 50 cm in height. This experimental model enabled to follow the space-time evolution of the water-table and the propagation of a tracer (Fluorescein) from the infiltration strip to the discharge system of the model. The modeling tool was validated using experimental data measured on the small-scale physical model and some results taken from the literature. It allowed to predict with an excellent precision the water-table position and the propagation of the non-reactive solute in both unsaturated and saturated compartments. A comparative study between the two numerical methods was carried out and showed that even if the finite differences method provides satisfactory results, the use of the finite elements Freefem++ code presents a light advantage and provides slightly more accurate results.

Keywords: experiments, numerical modeling, porous medium, unsaturated-saturated, finite elements, self-adapting grids, fluorescein

Résumé

Dans ce travail, un outil de modélisation mathématique a été mis au point pour modéliser de façon simple et rapide, et avec une précision acceptable, les transferts hydriques et de soluté dans un milieu poreux non saturé-saturé. La résolution de ce problème en régime instationnaire, est basée sur l'utilisation d'une formulation mathématique qui consiste à présenter dans un même continuum la zone saturée et la zone non saturée sous jacente. L'outil de modélisation est basé sur l'utilisation de deux méthodes numériques: la méthode des différences finies implicite aux directions alternées (ADI) et la méthode des éléments finis (utilisation d'un code de calcul d'éléments finis (Freefem++)), ce code a été adapté aux types d'équations utilisées dans le cadre de cette étude, à savoir: l'équation de Richards pour étudier l'écoulement de l'eau dans la zone non saturée, l'équation de la diffusivité écrite sous une forme linéaire et non linéaire pour l'écoulement dans la nappe et l'équation de transport de type advection-dispersion pour étudier le transport de soluté. L'avantage de l'utilisation de ce code, est qu'il permet de générer les maillages auto-adaptatifs ; cette démarche est intéressante pour l'étude des transferts au niveau des zones singulières, notamment au niveau de la frange capillaire. Des expérimentations ont été menées sur un modèle physique de laboratoire, à cet effet, une maquette expérimentale de 160 cm de long et 50 cm de haut a été montée. Ce modèle expérimental nous a permis de suivre l'évolution spatio-temporelle du niveau de la nappe et l'avancement d'un traceur (Fluorescéine) depuis la bande d'infiltration jusqu'à l'exutoire de la maquette. L'outil de modélisation a été validé à partir des données expérimentales effectuées au niveau du modèle réduit et des résultats émanant de la littérature, et a permis

de prédire avec une excellente précision la position de la surface libre de la nappe et l'avancement d'un soluté non réactif dans les deux compartiments du sol. Une étude comparative entre les deux méthodes numériques utilisées a été effectuée et a montré que même si la méthode des différences finies a donné des résultats satisfaisants, l'utilisation du code Freefem++ basé sur la méthode des éléments finis présente un léger avantage au niveau de la qualité des résultats.

Mots-Clés: expérimentations, modélisation numérique, milieu poreux, non saturé-saturé, éléments finis, maillages auto-adaptatifs

1- Introduction

La pollution des eaux souterraines est principalement due à l'infiltration, sur la totalité des surfaces cultivées, des eaux de pluie ou d'irrigation qui entraînent une partie de certaines substances chimiques vers la nappe à travers la zone non saturée du sol (zone aérée). C'est, en effet, dans cette zone du sol que se situent les réserves en eau et en substances nutritives pour les plantes, et qu'ont lieu l'essentiel des transferts conduisant à l'évaporation, l'infiltration, la recharge des nappes à surface libre, la fixation, la biodégradation et la lixiviation des composés minéraux et organiques (Ghoraba, 2013 ; El Yaouti, 2008). Elle est le siège de réactions importantes et d'une vie bactérienne intense. Les phénomènes d'adsorption au contact des sols riches en matières organiques et en minéraux argileux y jouent un rôle très important. Les argiles et les humus peuvent donner par exemple lieu à des échanges d'ions avec les eaux d'infiltration. Certains sels peuvent être précipités et ensuite retenus par les terrains sous-jacents par filtration.

La modélisation est un outil qui permet de représenter de façon simplifiée ces phénomènes complexes par le biais de modèles physiques (concret), ou de modèles mathématiques (abstrait). Elle peut donc être utilisée de manière simple et rapide, sur un site qui représente un certain nombre de problèmes physiques, chimiques ou biologiques et qui n'est pas forcément un site expérimental (Yong Tian, 2014 ; Anshuman Singh, 2014).

Les transferts hydriques et de soluté dans un milieu poreux non saturé-saturé constituent un problème très difficile à étudier à cause de la nature des équations régissant les transferts entre les deux zones. Cette difficulté provient du fait que le niveau de la nappe, qui constitue la condition inférieure de la zone non saturée à priori non connu, n'est pas constant, et dépend des échanges entre les deux zones et prend des positions variables dans le temps (Lemacha, 2006).

L'objectif du présent travail est de développer un modèle mathématique et numérique pour simuler les transferts transitoires d'eau et

de soluté dans les zones non saturée et saturée. Les résultats numériques seront validés sur les résultats expérimentaux obtenus au laboratoire sur une maquette en plexiglas de 50 cm de haut et 80 cm de long remplie de sable fin.

Pour la résolution numérique des équations caractérisant le transfert hydrique et le transport de soluté, nous avons utilisé deux méthodes numériques distinctes. Dans un premier temps, nous avons utilisé la méthode des différences finies aux directions alternées (ADI). Cette méthode permet d'effectuer un balayage des domaines quadrillés colonne par colonne puis ligne par ligne, alternativement, d'où son nom de méthode aux directions alternées. La méthode offre l'avantage de conduire à la résolution des systèmes linéaires dont les matrices sont des bandes tri-diagonales. Pour la résolution du problème de transport de soluté depuis la bande d'infiltration jusqu'à la nappe, la méthode des différences finies est appliquée avec une formulation totalement implicite. Dans un deuxième temps, nous avons utilisé le code de calcul Freefem++ (Hecht et al., 2003) qui se base sur la méthode des éléments finis. Ce code, qui au départ ne prévoyait pas la résolution des équations de transferts en milieux poreux, a été modifié pour l'adapter aux problèmes de transferts hydriques et de soluté dans les sols. L'utilisation de Freefem++, nous a permis d'une part, de comparer les résultats obtenus à partir de ce code avec ceux obtenus par la méthode ADI, et d'autre part, d'étudier l'effet du maillage auto-adaptatif sur la qualité des résultats obtenus par la méthode des éléments finis.

2- Matériel et Méthode

Position du problème

La figure 1 définit la géométrie du système étudié. Les limites du domaine d'écoulement sont :

- Une surface horizontale supérieure (surface du sol) sur une partie de laquelle est appliqué un flux initial q_0 , provoquant l'infiltration. La bande d'infiltration pourra simuler soit un canal d'irrigation, soit un bassin d'alimentation artificielle.
- Des tranchées équidistantes de l'axe de la bande d'infiltration où l'on pourra imposer un plan d'eau limitant l'épaisseur de la nappe. Chaque tranchée peut simuler un fossé de drainage.

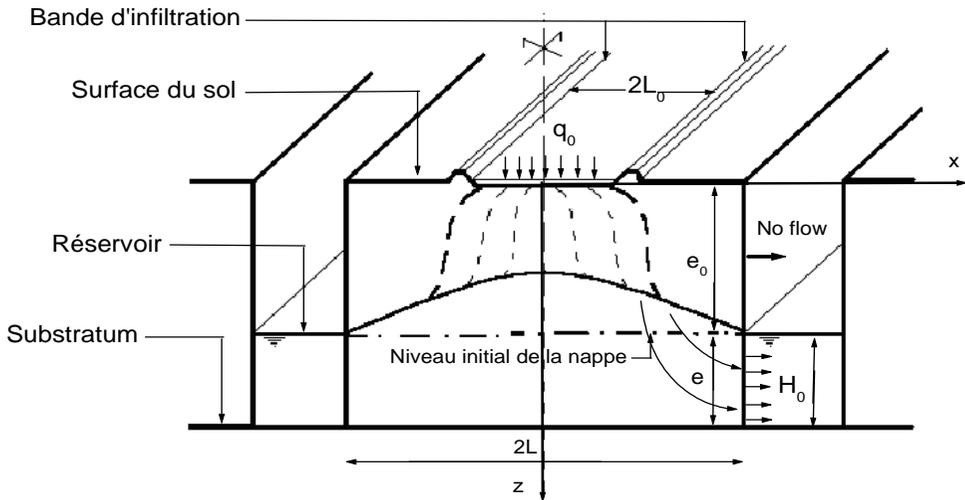


Figure 1 : Représentation schématique du problème de la recharge de la nappe.

Le problème étudié est donc un problème plan. On considère le système d'axe xoz , l'axe ox étant confondu avec la surface du sol, l'axe oz étant orienté positivement vers le bas et le point o étant au centre de la tranche de sol de largeur $2L$. On considère un problème de symétrie par rapport à oz . On pourra donc étudier les problèmes des transferts en ne considérant que ce qui se passe dans la moitié du système.

En partant d'une nappe à surface libre horizontale (figure 2) établie sur une épaisseur e (L) au-dessus d'un fond imperméable et à la profondeur e_0 , on applique à la surface du sol, sur une bande d'infiltration de largeur $2L_0$ (L) et de longueur infinie, une infiltration à flux constant q_0 (L/T). On suppose de plus que la bande d'infiltration est centrée entre deux tranchées parallèles (considérées comme des réservoirs) distantes de $2L$, pénétrant jusqu'à la couche imperméable, dans lesquelles, on maintient le niveau piézométrique à la profondeur constante e_0 (L).

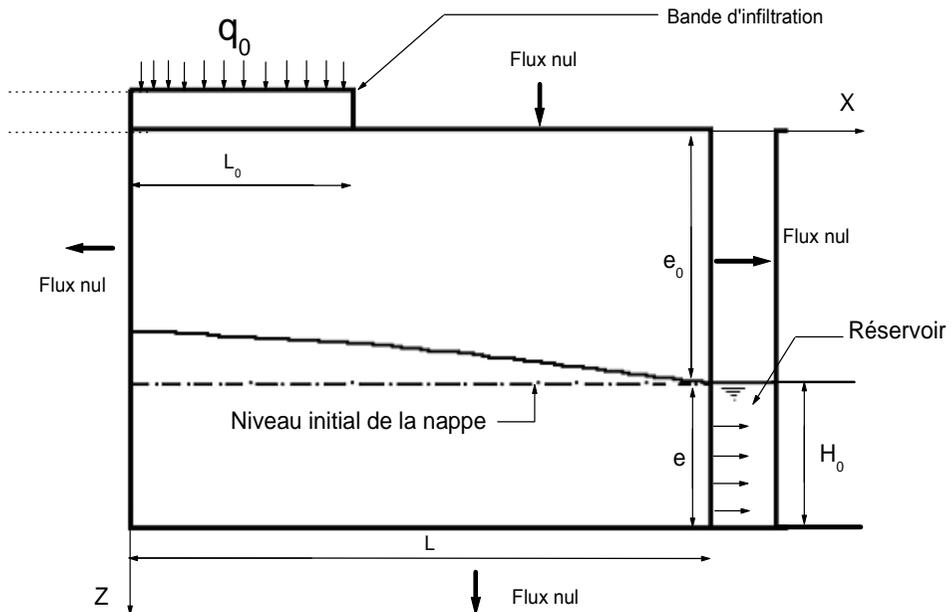


Figure 2 : Domaine d'étude.

Modèle mathématique

Transfert hydrique

L'équation du mouvement dans le cas de la zone non saturée, s'obtient en couplant la loi de Darcy généralisée qui exprime la loi de proportionnalité des flux à l'équation de continuité (Vauclin, 1971 ; Diederik, 2002). On considère que les deux zones non saturée-saturée forment un milieu qui peut être considéré comme un seul continuum. L'équation utilisée pour les deux zones a la forme de l'équation de Richards :

$$C \frac{\partial h}{\partial t} = \text{div}[K \text{grad}(h-z)] \quad (1)$$

Avec C et K, deux fonctions qui dépendent de la nature du milieu considéré.

- Si on se situe dans le cas de la zone non saturée :

$C=C(h)$, la capacité capillaire (L^{-1})

$K=K(h)$, la conductivité hydraulique (L/T)

On retrouve l'équation classique de Richards pour la zone non saturée

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \text{div}[K(h) \text{grad}(h-z)] \quad (2)$$

- Si on se situe dans le cas de la zone saturée :

$C = S$ Coefficient d'emménagement (L^{-1})

$K = K_s$, (conductivité hydraulique à saturation) (L/T)

On obtient l'équation de la diffusivité caractérisant l'écoulement non permanent de l'eau dans un milieu saturé:

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

Avec : $S_s = \frac{S}{K_s}$

Transport de soluté

Le principe de conservation de la masse d'un soluté non interactif avec la matrice du sol peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} = -\nabla \Psi \quad (4)$$

Avec :

C : La concentration du polluant. (M / L³)

θ : La teneur volumique en eau. (L³/L³)

Ψ : le vecteur densité de flux de soluté (M / L² T) qui résulte de la contribution des phénomènes de convection et de dispersion. Il est donné par la relation :

$$\Psi = -D_{ap}(\theta)\nabla C + qC \quad (5)$$

D_{ap} : coefficient de diffusion dispersion apparent de soluté dans la phase liquide. (L²/ T)

En introduisant l'équation (5) dans l'équation de conservation de la masse (4), on obtient l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} = \nabla(D_{ap}(\theta)\nabla C) - \nabla(qC) \quad (6)$$

Dans le plan xoz, cette équation prend la forme suivante :

$$\theta \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_L q_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (qC) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha_T q_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (qC) \quad (7)$$

Où α (L) est la dispersivité.

Dans un écoulement bidirectionnel, on fait la distinction entre la dispersion se produisant dans la direction de l'écoulement (dispersion longitudinale) et la dispersion se produisant dans un plan orthogonal (dispersion transversale). On introduit alors deux coefficients, la dispersivité longitudinale α_L (L) et transversale α_T (L).

Modèle numérique

Les méthodes de résolution utilisées dans le cadre de cette étude sont d'une part, la méthode implicite aux directions alternées (ADI), cette

méthode offre l'avantage de conduire à la résolution du système linéaire dont les matrices sont des bandes tridiagonales, tout en réduisant sensiblement le temps de calcul par rapport aux méthodes explicites et au schéma de Crank-Nicolson (Remson, 1971). Cette méthode revient donc à effectuer un balayage des domaines quadrillés colonne par colonne puis ligne par ligne, alternativement, d'où son nom de méthode de directions alternées. Elle a été utilisée avec succès pour résoudre différents problèmes notamment l'infiltration bidimensionnelle en l'absence de nappe (Rubin, 1961, Khanji, 1975). D'autre part, nous avons utilisé le logiciel Freefem++, développé par Hecht et Pironneau (2003), ce logiciel utilise une syntaxe très intuitive, proche de l'expression mathématique, pour résoudre des équations aux dérivées partielles sur des domaines en 2D par la méthode des éléments finis. Aussi utilisons-nous, la capacité de Freefem++ pour générer automatiquement, par l'algorithme de Delaunay-Voronoi, des maillages triangulaires à partir des frontières du domaine du calcul. Nous avons adapté ce logiciel aux problèmes d'écoulement de l'eau et du transport de soluté dans un milieu poreux non saturé-saturé. Dans tous les essais numériques, nous avons utilisé des éléments finis de degré zéro, P_0 pour le champ de flux et de degré un, P_1 pour les champs de pression, de charges et de concentration.

Modèle expérimental

Dispositif expérimental du transfert hydrique

Pour les essais expérimentaux, nous avons mis au point une maquette de recherche dont l'objectif est de reproduire au laboratoire le fonctionnement hydraulique d'une nappe superficielle drainée en conditions maîtrisées. La maquette est formée par deux réservoirs symétriques. Elle est remplie de sable fin dont les caractéristiques hydrodispersives ont été définies au paragraphe précédent. Pour étudier le suivi et visualiser la remontée du niveau de la nappe due à l'infiltration de l'eau à partir de la surface du sol, la maquette a été équipée d'une série de piézomètres numérotés tout au long d'une de ses bordures (figure 3). Pour calculer le niveau d'eau dans tout le domaine, une série de cinq piézomètres a été placée sur la même ligne latérale. Etant donné, qu'un des intérêts de l'étude est d'avoir des informations relatives à la remontée de la nappe, nous avons donc relevé les niveaux d'eau sur les piézomètres situés au niveau de la paroi de la maquette. Un simulateur de pluie a été installé pour alimenter le domaine en débit constant. Le simulateur de pluie est relié à deux pompes à débit bien défini (la première pompe fonctionne avec un débit d'un litre par minute et la seconde est à 0.75 litre par minute) qui se situent au fond d'un réservoir de 220 litres. Au niveau des deux fossés de la maquette, des tubes de diamètre moyen et d'une hauteur de 10 cm ont été placés pour conserver

une charge constante. Les quantités d'eau qui s'écoulent dans les tubes sont transférées à nouveau au réservoir pour une nouvelle alimentation.



Figure 3 : Photos de la maquette et des piézomètres.

Dispositif expérimental du transport de soluté

Pour étudier l'évolution des concentrations à travers un point fixe situé à l'amont de la sortie de la maquette, nous avons rempli le réservoir d'alimentation par une solution de fluorescéine en imposant une

concentration de $9 \cdot 10^{-3}$ mol / l (une injection continue) au niveau de la bande d'infiltration et nous avons utilisé les mêmes pompes que pour le cas du transfert hydrique pour alimenter la maquette.

3- Résultats et Discussion

Validation et étude comparative de l'évolution spatio-temporelle du niveau de la nappe

Les résultats expérimentaux obtenus ont été utilisés pour valider les deux modèles numériques utilisés (FDM et FEM). La figure 4 représente la répartition spatiale des profils de la surface libre mesurée et calculée par la méthode des différences finies et éléments finis en régime permanent. On remarque que le niveau piézométrique se stabilise sur une position maximale. Ceci implique que le débit entrant par la bande d'infiltration devient égal à celui sortant par le fossé de la maquette. D'après les résultats présentés sur cette figure, on note qu'il y'a un bon accord entre les profils de la surface libre mesurés et calculés par les deux méthodes numériques durant toute la phase de la recharge. On remarque aussi que les valeurs obtenues par la méthode des éléments finis sont plus proches des valeurs mesurées que celles obtenues par la méthode des différences finies. La bonne qualité des résultats obtenus par éléments finis est due essentiellement au raffinement automatique du maillage au niveau de la frange capillaire.

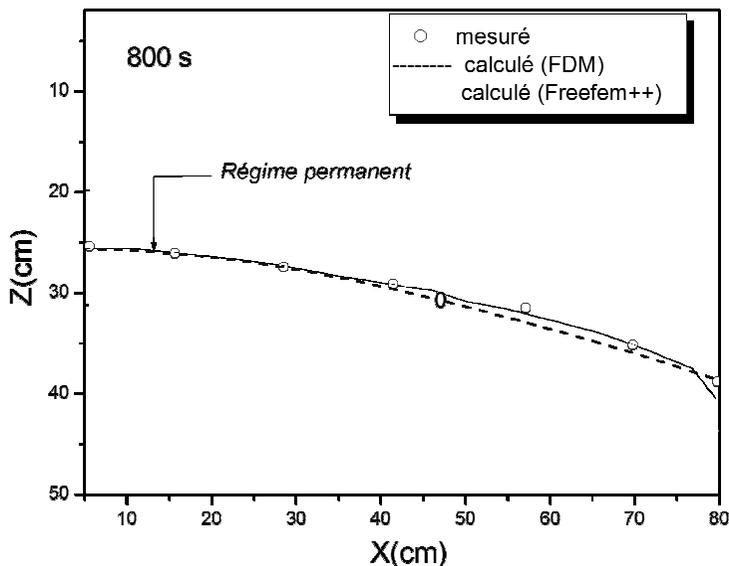


Figure 4 : Comparaison entre les profils de surface libre calculés (par la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies (FDM)) et mesurés au temps $t = 800$ s.

Le raffinement du maillage est réalisé automatiquement durant toute la période de la recharge au niveau des zones qui peuvent être considérées comme des zones à singularités mathématiques (zones de perturbations), à savoir : la bande d'infiltration et la frange capillaire. Cette procédure améliore sensiblement la qualité des résultats obtenus. La figure 5 montre les zones touchées par le raffinement du maillage qui se fait automatiquement, et les profils de charge obtenus après la procédure de raffinement.

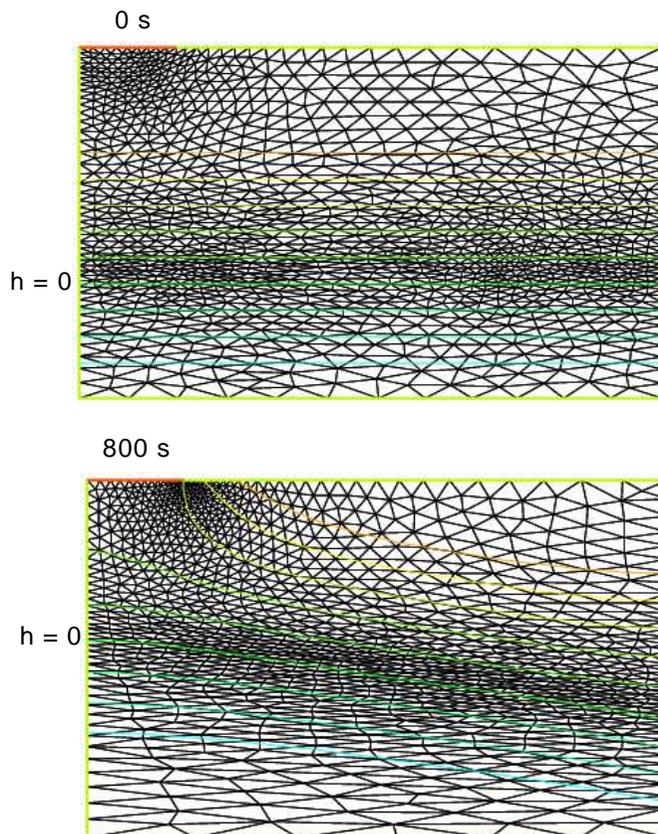


Figure 5 : Maillage auto-adaptatif réalisé au niveau du front d'humidité et de la frange capillaire à 0 et 800 s.

Etude de l'évolution spatio-temporelle de la concentration de soluté

Pour étudier le phénomène du transport d'un polluant dans la zone non saturée et la zone saturée, nous avons effectué une étude expérimentale

basée sur le transport d'un traceur non réactif depuis la bande d'infiltration jusqu'à la sortie d'une maquette expérimentale. A cet effet, nous avons imposé une concentration de fluorescéine de $9 \cdot 10^{-3}$ mol/l au niveau de la zone d'alimentation (injection continue dans le temps). La figure 6 représente l'évolution spatio-temporelle du traceur, la comparaison des résultats simulés à partir des deux modèles avec les valeurs expérimentales montre qu'il y'a un bon accord entre les profils de concentration obtenus. Cette figure montre aussi que les résultats obtenus par la méthode des éléments finis sont plus proches des valeurs expérimentales que celles obtenues par différences finies.

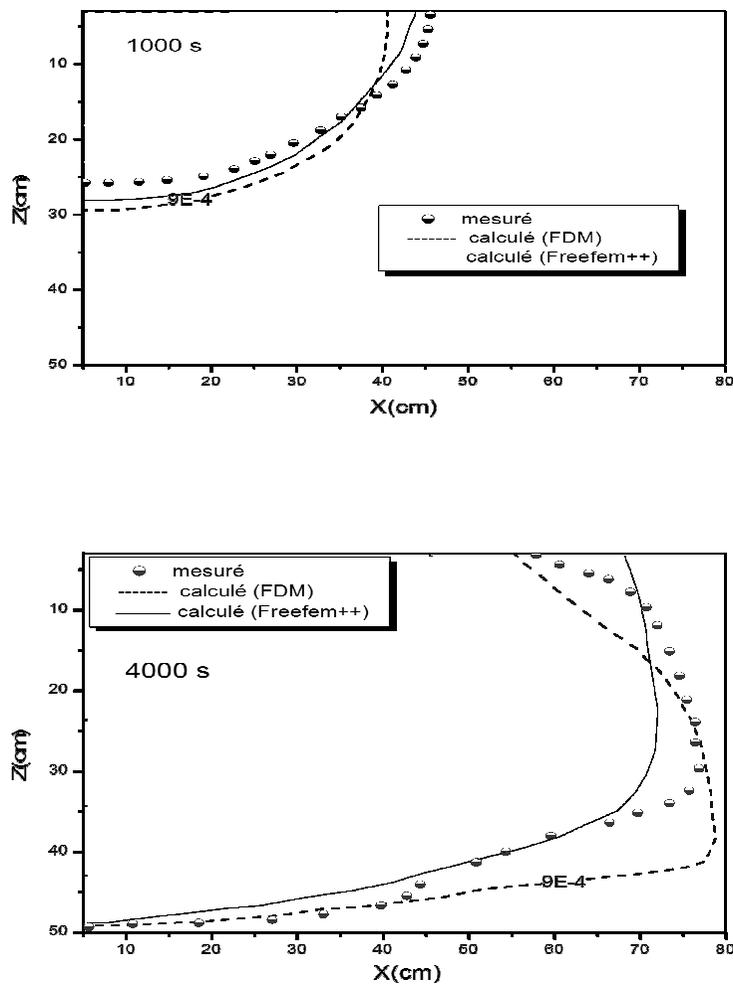


Figure 6 : Comparaison entre les profils de la concentration calculés (par éléments finis et différences finies) et mesurés aux temps $t = 1000$ et 4000 s.

4- Conclusion

Pour modéliser les transferts hydriques et de solutés dans la zone non saturée et la zone saturée des aquifères à nappe libre, nous avons utilisé une formulation mathématique qui intègre les deux zones dans un seul continuum et une résolution numérique basée sur deux méthodes numériques de résolution. Les simulations numériques ont été validées sur les essais de laboratoire effectués sur maquette. La comparaison entre les deux méthodes numériques utilisées montre que même si la méthode des différences finies donne des résultats intéressants, le code Freefem++ basé sur la méthode des éléments finis présente un léger avantage au niveau de la qualité des résultats et ceci grâce à la possibilité de raffiner le maillage automatiquement (Maslouhi, 2009). Les résultats présentés ici, ont été obtenus au laboratoire et il est indispensable évidemment d'en prévoir l'extension au niveau du terrain : le passage de l'échelle de la parcelle, puis du bassin versant représente le prolongement naturel à ces recherches. Bien que le modèle mathématique ait été conçu pour permettre son application à des problèmes à grandes échelles spatiales, l'obstacle essentiel provient de la difficulté d'obtenir in situ les relations caractéristiques du sol $K(h)$ et $\theta(h)$ et leur forte variabilité spatiale et la détermination d'autres paramètres.

References:

- Anshuman Singh, Allen-King R.M. and Rabideau A.J. (2014). - Groundwater transport modeling with nonlinear sorption and intraparticle diffusion. *Advances in Water Resources*, 70: 12–23.
- Diederik J., Simunek J., Timmerman A. And Feyen J. (2002). - Calibration of Richards' and convection-dispersion equations to field-scale water flow and solute transport under rainfall conditions. *Journal of Hydrology*, 259: 15–31.
- El Yaouti F., El Mandour A., Khattach D. and Kaufmann O. (2008). - Modelling groundwater flow and advective contaminant transport in the Bou-Areg unconfined aquifer (NE Morocco). *Journal of Hydro-environment Research*, 2: 192–209.
- Ghoraba S.M., Zyedan B.A. and Rashwan I.M.H. (2013). - Solute transport modeling of the groundwater for quaternary aquifer quality management in Middle Delta, Egypt. *Alexandria Engineering Journal*, 52: 197–207.
- Hecht F., and Pironneau O. (2003). - FreeFem++. Available at : <http://www.freefem.org/>
- Khanji D. (1975). - Etude de la recharge des nappes à surface libre par infiltration. Thèse Doctorat ès Sciences Physiques, Grenoble, France.
- Lemacha H., Maslouhi A. and Razack M. (2006). - Numerical Modeling of Transient Flow in Unsaturated-saturated Zone. *Phys. Chem. News*. 33: 16-24.

- Lemacha H., Maslouhi A. and Razack M., Mghazli Z. (2006). - Numerical modeling of unsteady water flow and solute transport in unconfined aquifers. Effect of the unsaturated zone. AMSE Journal.
- Maslouhi A., Lemacha H. and Razack M. (2009). - Modelling of water flow and solute transport in saturated–unsaturated media using a self adapting mesh. IAHS Publ. 331, 2009
- Remson I., Hornberger G.M. and Molz F.D. (1971). - Numerical methods in subsurface hydrology. John wiley, New York.
- Rubin J. (1961). - Theoretical analyses of two-dimensional transient flow of water in saturated and partly saturated soils. Soil Soc. Amer. Proc., 32: 607-615.
- Saâdi Z. and Maslouhi A. (2003). - Modeling nitrogen dynamics in unsaturated soils for evaluating nitrate contamination of Mnasra groundwater. Advances in Environmental Research. 7: 803-823.
- Tamoh K. and Maslouhi A. (2004). - Mesures in situ par infiltrométrie des propriétés hydrodynamiques des sols de Mnasra (Maroc). CRAS, 336 :535-545.
- Vauclin M. (1971). - Effets dynamiques sur la relation succion-teneur en eau, lors d'écoulement en milieu saturé. Thèse de docteur ingénieur, Grenoble, France.
- Ventrella D., Mohanty B. P., Simunek J., Losavio N. And Van Genuchten M. Th. (2000). - Water and chloride transport in a fine-textured soil: field experiments and modeling. Soil sci., 165: 624-631.
- Yong Tian, Yi Zheng, Bin Wu, Xin Wu, Jie Liu and Chunmiao Zheng (2014). - Modeling surface water-groundwater interaction in arid and semi-arid regions with intensive agriculture. Environmental Modelling & Software, 63: 170–184.